بررسی پایداری پدیده Shimmy در ارابه فرود هواپیما*

انوشیروان فرشیدیان‌فر[۱]   مصطفی طوفانی[۲]

چکیده *Shimmy پدیده‌ی ارتعاشی خودبرانگیخته‌ای می‌باشد؛ که برای تحلیل آن تاکنون مدل‌های گوناگونی ارائه گردیده است. در این مقاله از مدلی غیرخطی برای بیان رفتار این پدیده استفاده می‌شود. مدل، ابتدا خطی‌سازی شده، با تشکیل فضای حالت و محاسبه مقادیر ویژه ماتریس ضرائب، پایداری سیستم با معیار روث- هورویتس بررسی می‌گردد. آنگاه مرزهای پایداری در فضای پارامتری تعیین، و بر تاثیر پارامترها در پایداری بحث می‌شود. در انتها مدل غیرخطی با نرم‌افزار، حل عددی شده، با تعیین نوع پایداری، نتایج حاصل از خطی‌سازی بررسی و تائید شده است. نتایج نشان می‌دهند که خطی‌سازی در ارائه دیدی کلی از چگونگی رفتار پدیده و تحلیل پایداری آن مفید می‌باشد. اما جهت تعیین وضعیت دقیق سیستم در هر حالت می‌بایست از حل عددی استفاده نمود.*

واژه‌های کلیدی shimmy، پایداری، مقادیر ویژه، مدل‌سازی غیرخطی، چرخه‌حدی

Stability Investigation of SHIMMY Phenomenon of Aircraft Landing Gear

A.Farshidianfar   M.Toofani

Abstract *Shimmy is a self-excited oscillatory, combined lateral-yaw motion of the landing gear caused by the interaction between dynamic tyre behavior and landing gear structural dynamics. Initially, the models for evaluating shimmy stability remaineds linear. Although linear model will usually reveal basic characteristics, it will generally fail to accurately predict the behavior of a landing gear system. This study treats the torsional dynamics of the lower parts of the landing gear as a multi-degree of freedom mechanical system and tire elasticity according to the elastic string theory. First they are linearized. Then eigenvalues are computed, solving analytically the stability boundaries with a parameter space method and numerical solution by simulation of the nonlinear system for time histories. It can play the role of linear analysis verification. It seems that linearized methods are well suited to obtain extensive insight, respecting limitations of these methods. Numerical simulation, on the other hand, is a valuable tool for pointing out specific effects of a nonlinear system in large amplitude regions.*

Key Words shimmy, stability, eigenvalues, non linear, simulation, limit cycle

*نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۸۸/۹/۸ و نسخه پذیرش آن در تاریخ ۸۹/۱۲/۸ و نسخه آماده چاپ در تاریخ ۹۰/۳/۲۱ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: دانشیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

(۲) کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد

مقدمه

یکی از مهم‌ترین و در عین‌حال پیچیده‌ترین قسمت‌های موجود در هواپیما، ارابه فرود آن می‌باشد که در صورت عدم کارکرد مناسب در لحظه فرود، قادر به مستهلک کردن انرژی‌های عمودی و افقی هواپیما نبوده و این حجم زیاد انرژی، به سرنشینان منتقل می‌شود، و پیامد آن بروز حوادث ناگواری می‌باشد [1]. در بررسی انجام شده بر روی ۱۴۰۸ سانحه‌ی هوایی، مشخص گردید علت بیش از یک سوم این حوادث (٤٥٦ مورد) نقص در عملکرد ارابه فرود هواپیما می‌باشد؛ که این تعداد، بیش از دو برابر مهم‌ترین عامل پس از آن، یعنی موتور (با ۱۹۲ مورد) می‌باشد [2]. یک ارابه فرود مناسب علاوه بر مستهلک کردن انرژی‌ها، وظایف دیگری نیز بر عهده دارد، لذا محاسبات و مدل‌سازی‌های زیادی در مراحل اولیه طراحی و ساخت یک ارابه فرود، انجام می‌گیرد. یکی از مهم‌ترین آن‌ها، بررسی پدیده shimmy می‌باشد.

پدیده‌ی shimmy، یک پدیده‌ی ارتعاشی خودتحریک می‌باشد که در آن چرخ، حول محور عمود بر مجموعه، در حال دوران و ارتعاش است. این پدیده دربازه‌هایی از سرعت و در حین فرود، بلندشدن و حرکت بر روی باند، قابل مشاهده می‌باشد. این ارتعاش معمولا در فرکانس‌های ۱۰ تا ۳۰ هرتز، رخ می‌دهد و رشد دامنه این ارتعاش می‌تواند تا آن جا پیش برود که بر روی آرامش خلبان و سرنشینان اثر بگذارد [3]. پدیده shimmy به خودی خود خطر مرگبار محسوب نمی‌شود، بلکه با افزایش نرخ فرسایش، می‌تواند سبب به‌وجود آمدن حادثه گردد. پدیده shimmy در ارابه فرود هواپیما، اتومبیل و حتی در موتور سیکلت قابل مشاهده است [2]. دلیل اصلی به‌وجود آمدن این پدیده نیروهایی با منشأ ناهمواری جاده، نامیزانی چرخ، ناهمسانی تایر و نیروهای جانبی به‌وجود آمده در تایر می‌باشد. این پدیده نه تنها در چرخ دماغه، بلکه در همه‌ی چرخ‌های هواپیما قابل رخ‌دادن است؛ ولی به دلیل اینکه در دماغه محسوس‌تر بوده و زودتر حادث می‌شود، معمولا این چرخ مورد بررسی قرار می‌گیرد. از نکاتی که تأمل بر روی آن می‌تواند اهمیت موضوع را افزایش دهد، هنگامی است که به فرکانس طبیعی نزدیک می‌شود [2].

کشور فرانسه اولین کشور در بررسی این پدیده است، اما با نگاهی به گذشته می‌توان دریافت نقش کشور آلمان در ادامه انجام تحقیقات از فرانسه بسیار پررنگ‌تر می‌باشد [1].

اولین مقاله راجع به این پدیده در سال ۱۹۲۰ توسط یک کمپانی اتومبیل‌سازی به چاپ رسید. یکی از شناخته‌ترین بررسی‌های انجام شده درباره‌ی نقش مکانیک تایر در shimmy به سال ۱۹۲۵ باز می‌گردد که توسط بروئیت(Broulhiet) انجام گرفت. هنگامی که بروئیت مشغول انجام تحقیقات بر روی تایر بود، اولین تئوری بنیادی در زمینه shimmy توسط سنسود دلواد (Sensoud de Lavaud) بیان گردید [1]. فرام (Fromm) نیز در مقاله خود تشابه پدیده‌ی shimmy در اتومبیل و هواپیما را نشان داد. در همین دوران بود که اهمیت تایر و مدل‌سازی آن در بررسی پدیده‌ی Shimmy مشخص شد [1].

اولین مدلی که برای تایر ارائه گردید، مدلی بود که وانسکلاب (B. von Schlippe) و دایتریخ (R.Dietrich) در مقاله‌ی خود که در سال ۱۹٤۱ انتشار یافت، ارائه دادند. این مدل به مدل ریسمان ارتجاعی (stretched string) معروف می باشد [2].

در سال ۱۹۵۰ اگرچه پدیده‌ی shimmy سال‌ها مورد بررسی قرار گرفته بود ولی هنوز هم پدیده‌ای رایج به حساب نمی‌آمد. در این دوران وسایل رایج در کنترل shimmy، میراکننده‌های shimmy بودند؛ در حالی که از لحاظ فیزیکی این پدیده کاملا شناخته شده نبود. در سال ۱۹٥٤ مورلند (W.J. Moreland) در مقاله‌ای مدل جدیدی برای تایر هواپیما ارائه کرد. او در مدل خود ناحیه تماس را به صورت نقطه ی تماس

(Contact Point)، و دو درجه آزادی نسبت به لبه‌ی چرخ در نظر گرفته بود. امروزه این مدل با نام مدل تماس نقطه‌ای یا مدل مورلند مورد استفاده قرار می‌گیرد [2].

او در مدل خود از معیار پایداری روث-هورویتس (Hurwitz–Roth) برای بررسی پایداری پدیده Shimmy استفاده کرد و اثر پارامترهای ممان اینرسی چرخ و سختی پیچشی و عرضی تایر بر روی پایداری را مطالعه نمود [3].

در ۱۹۵۷ اسمایلی (R.F. Smiley) ترکیبی از تئوری‌های موجود تایر را در یک تئوری ارائه کرد. اسمایلی و هورن (W.B. Horne) نیز با بازنگری در شاخصه‌های تایر فرمول‌های تجربی برای تعیین این پارامترها ارائه کردند [1,2].

بسیاری از پژوهشگران پدیده Shimmy را به صورت یک پدیده غیرخطی تحلیل کرده‌اند. هر چند مدل‌های خطی مکانیزم Shimmy معمولا ویژگی‌های پایه آن را آشکار می‌سازد اما در حالت کلی این مدل‌ها برای یک پیش‌بینی دقیق از سیستم ارابه فرود، پاسخ صحیحی ارائه نمی‌کنند. پاسچکا (Pacejka) یکی از اولین افرادی بود که مدل‌های غیرخطی را برای بررسی این پدیده ارائه کرد. او در سال ۱۹٦٦، در رسالهٔ دکتری خود، با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی در تایر و سیستم تعلیق به بررسی این پدیده پرداخت. او رفتار گذرای تایر را بر مبنای تئوری ریسمان ارتجاعی، بررسی نمود[2]. او در مقاله دیگری [4] در ۱۹۷۳، روشی را برای محاسبه ارتعاشات در سرعت و فرکانس‌های بالا ارائه داده و اظهار می‌دارد که محاسبات حاکی از تاثیر مثبت افزایش اینرسی در کاهش تمایل به Shimmy در سرعت و فرکانس بالا می‌باشد .

پس از آن کالینز و بلیک [5] در ۱۹٦۹ در مقاله‌ای به مطالعه پارامترهای موثر در پدیده Shimmy پرداخته و لیستی از پارامترهای مهم و کافی در تخمین پایداری پدیده Shimmy و چگونگی اندازه‌گیری آنها ارائه کرده‌اند. در ۱۹۷۱ راجرز یک فرمول تجربی برای اندازه‌گیری برخی از پارامترها معرفی کرد. سپس با گسترش مدل پایه‌ای ریسمان ارتجاعی، یک مدل تئوریک جهت اثبات فرضیات تجربی خود ارائه نمود [3]. در ۱۹۷٤ کلرک، آزمایش‌هایی بر روی اندازه‌های مختلف تایر انجام داد. در ۱۹۷٦ بلیک در مقاله‌ی خود پیشنهاد اضافه کردن تغییر مکان بدنه‌ی هواپیما در تحلیل پدیده‌ی Shimmy را ارائه نمود [1].

در ۱۹۷۸ گوردن [6] سیستم دو درجه آزادی غیرخطی با میرائی متناسب با مجذور سرعت را مدل نموده واز روش پرتوربیشن برای تخمین دامنه‌ی پدیده Shimmy استفاده کرد. در ۱۹۸۰ گراسمن از یک روش خطی‌سازی برای حل معادلات غیرخطی و تعیین ضریب میرائی و ضریب ارتجاعی فنر معادل، به جهت کاهش زمان حل، استفاده نمود. بلیک [7] در ۱۹۸۲ یک روش سیستماتیک را برای تعیین پارامترهای مورد استفاده در مدل مورلند ارائه نمود.

در ۱۹۹۲ ون‌دروالک به همراه پاسچکا مدلی را جهت توصیف خمش در قسمت‌های اصلی و اجزای لغزشی ارائه کرد [2]. لی (۱۹۹۳) نیز مدلی مشابه با مدل بلیک ارائه داد. در ۱۹۹۲ انگلسن با استفاده از یک مدل خطی ساده، به بررسی پایداری در ارابه فرود پرداخته و تاثیر سرعت را بر روی پایداری Shimmy نشان داد. او همچنین تاثیر پارامترهای تایر در پایداری را مورد بررسی قرار داده است [3].

در۱۹۹۵ کنفرانس AGARD (Advisory Group for Aerospace Research & Development) به بررسی پدیده Shimmy در ارابه فرود هواپیما اختصاص یافت. مقالات بسیاری در این کنفرانس ارائه گردید. کراباچر، پیشنهاد تشکیل کارگروهی جهت استانداردسازی مدل، برای دینامیک ارابه فرود را می‌نماید و خواستار به روزرسانی کار اسمایلی و هورن در تعیین و اندازه گیری پارامترهای تایر هواپیما، جهت استفاده در تایرهای امروزی می‌شود [2]. کراباچر در

۱۹۹۷ در مقاله‌ای به مقایسه دو مدل تایر ارائه شده توسط مورلند و وانسکلاب- دایتریخ در بررسی پدیده Shimmy، پرداخت [7]. زامسکی [8] نیز در همین سال با ارائه مقاله‌ای با در نظر گرفتن یکی از مدل‌های غیرخطی ارابه فرود و نیروهای وارده بر آن، به بررسی پایداری Shimmy با معیار روث-هورویتس می‌پردازد. او در مقاله خود با سه روش خطی‌سازی، مسأله غیرخطی را ساده نموده، و پایداری را در آن مورد بررسی قرار می‌دهد. مدل او تنها شامل گشتاورهای پیچشی وارد بر ارابه فرود بود.

اسماعیل‌زاده و فرزانه [9] نیز در ۱۹۹۷ در مقاله‌ای، به بررسی یک مدل دینامیک، جهت تعیین مقادیر گذرای زاویه انحراف، زاویه چرخشی و جابجایی عرضی پرداختند. آنها همچنین تاثیر تغییر در برخی پارامترهای طراحی، مانند ضریب میرائی و محل مرکز ثقل هواپیما را در پایداری پدیده Shimmy بررسی کردند.

در نوامبر ۲۰۰۱، زامسکی [10] مقاله دوم خود را ارائه نمود، که در آن با بیان روشی موسوم به "توابع توصیفی" (Describing Function) به حل مسائل غیرخطی مضاعف می‌پردازد. او به عنوان مثال به حل معادلات حاصل از مدل غیرخطی Shimmy پرداخته و پایداری را در آن پیش‌بینی می‌نماید.

در همین سال یکی از شاگردان پاسچکا به نام بزلینک در پایان‌نامه دکتری خود، به بررسی جامع پدیده Shimmy پرداخت. وی در این پایان‌نامه، سعی در ارائه دیدی جامع از این پدیده و مکانیزم‌های پایه درگیر با آن دارد، تا بتواند به عنوان راهنمایی برای طراحی‌ها، مورد استفاده قرار بگیرد. او همچنین در یک فصل، به بررسی و تحلیل مدل‌های ارائه شده برای تایر می‌پردازد، و در انتها مجموعه‌ای از پارامترهای موثر، و دقت لازم اندازه‌گیری آنها را بیان می‌دارد. این پایان‌نامه یکی از جامع‌ترین مستندات در زمینه Shimmy می‌باشد [2].

در سال ۲۰۰۲ گروهی از محققان (Etienne Coetzee Group) [11] از ایرباس، در مقاله‌ای، با بررسی مدل ساده ارائه شده توسط زامسکی، ابتدا پارامترهای این مدل را بی‌بعد ساخته و سپس با خطی‌سازی مدل به بررسی مرزهای پایداری و تاثیر چند پارامتر در این پایداری‌ها پرداختند. در نهایت نیز با کمک بسته نرم‌افزاری AUTO حل عددی مسأله را انجام داده و دوشاخگی (Bifurcation) را در دامنه ارتعاشات پیش‌بینی شده مورد بررسی قرار داده‌اند. در سال ۲۰۰۳ ژو و ژانگ با در نظر گرفتن یک مدل ٤ درجه آزادی غیرخطی از ارابه فرود، پدیده Shimmy را در آن مورد بررسی قرار دادند. آنها با استفاده از یکی از روش‌های پرتوربیشن، یعنی روش توسعه یافته بالانس هارمونیکی افزایشی، موسوم به IHB (Harmonic Balance Method Incremental) به حل این معادلات پرداختند [6].

در سال ۲۰۰۵ پاسچکا [12] کتابی تحت عنوان "دینامیک ماشین و تایر" (Tyre and Vehicle Dynamic) به چاپ رساند. او در این کتاب ابتدا پارامترهای تایر را معرفی و مدل‌های مختلف ارائه شده را مورد بررسی قرار داد. مدل براش را به طور کامل توضیح داده و معادلات آن را ارائه نمود. در فصل شش کتاب نیز مشخصا به بررسی پدیده Shimmy پرداخت. او در اینجا مدلی را ارائه نمود که در آن علاوه بر اثر ممان اینرسی ارابه فرود، اثر جرم ارابه را نیز در فاکتوری جداگانه در معادلات لحاظ نمود. این کتاب حاصل تلاش‌ها و تحقیقات چندین ساله او و شاگردانش در زمینه تایر و Shimmy می‌باشد.

در سال ۲۰۰۷ تاکاکس و استپن [13] در مقاله خود با استفاده از یک مدل دو درجه آزادی، و به کمک معادلات دیفرانسیل جزئی Shimmy را مدل نموده، به بررسی پایداری و دوشاخه‌شدن در آن پرداختند. آنها مدل را با نسخه جدیدتری از نرم افزار AUTO (AUTO97) به صورت عددی حل کرده و با نتایج

خود مقایسه نمودند.

در سال ۲۰۰۸ فلاح و همکارانش [14] در دانشگاه کنکوردیا، همان مدل ارائه شده توسط زامسکی را درنظر گرفته، و با کمک نتایج حاصل از حل معادلات او، سعی در طراحی کنترلری برای خنثی‌کردن Shimmy نمودند. آن‌ها نیز نتایج کار خود را با حل‌های عددی مورد مقایسه قرار دادند.

در سال ۲۰۰۹ نیز دوباره تاکاکس و استپن [15] در مقاله‌ای دیگر اثر تاخیر زمانی را در معادلات دیفرانسیل جزئی مدل خود اضافه کرده، و نتایج کار خود را با داده‌های عددی و تجربی مقایسه نمودند. آن‌ها برای نتایج تجربی، مدل ساده‌ای از چرخ و مسیر حرکت را در آزمایشگاه خود ساخته، نیروها و تغییر مکان‌های حاصل را اندازه‌گیری نمودند.

در این پژوهش سعی شده است تا با استفاده از یک مدل غیرخطی به بررسی پایداری در پدیده shimmy پرداخته شود. بدین منظور، ابتدا به معرفی مدل مورد نظر پرداخته و معادلات و روابط مربوطه ارائه گردیده است. سپس معادلات خطی‌سازی شده و پایداری روابط خطی حاصل به کمک معیار روث-هورویتس مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه نیز، معادله مشخصه سیستم حل تحلیلی شده و مرزهای پایداری آن تعیین گردیده است. همچنین در محیط پارامتری، اثر چند پارامتر مهم در طراحی، بر مرزهای پایداری، مورد بررسی قرار گرفته است. در انتها نیز معادله غیرخطی، حل عددی شده و با تعیین نوع پایداری، نتایج حاصله، با نتایج معادلات خطی‌سازی شده مقایسه شده است.

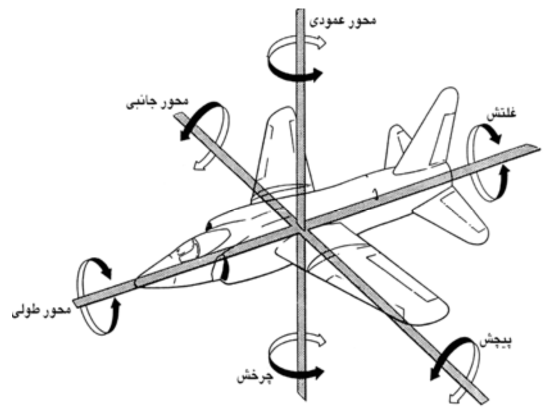
مدل‌سازی shimmy

تا کنون مدل‌های بسیاری برای بررسی پدیده shimmy ارائه شده است. بسیاری از این مدل‌ها خطی و برخی غیرخطی بوده‌اند. همچنین می‌توان ادعا کرد که از مهم‌ترین بخش‌های ارابه فرود، تایر آن می‌باشد، که به دلیل خواص الاستیکی که دارد تاثیر به‌سزایی در رفتار ارابه فرود، در هنگام تماس با زمین دارد. از این‌رو مهم‌ترین بخش در مدل‌سازی ارابه فرود، مدل‌سازی تایر و واکنش آن در سطح تماس با زمین است.

یکی از مدل‌های غیرخطی در بررسی پدیده shimmy، مدلی است که توسط پاسچکا [12] ارائه گردیده است. این مدل‌سازی بر مبنای توصیف رفتار دینامیکی سیستم بنا شده، و معادلات با در نظر گرفتن حرکات پیچشی ارابه فرود و اثرات ممان‌ها و نیروهای وارده بر آن در صفحه افقی، مدل شده‌اند.

برای درک بهتر مطلب ضروری است که چند اصطلاح در اینجا معرفی گردد:

زاویه چرخشی (yaw) (ψ). در حالت کلی هواپیما (یا هر شئ متحرک دیگری) دارای شش حرکت اصلی است. این حرکات مطابق شکل (۱) شامل حرکت طولی، حرکت جانبی، حرکت عمودی، گردش حول محور طولی (حرکت غلتشی) (Roll)، گردش حول محور جانبی(حرکت پیچشی) (Pitch) و گردش حول محور عمودی (حرکت چرخشی) (Yaw) می‌باشند.



شکل ۱ سیستم مختصات متصل به هواپیما

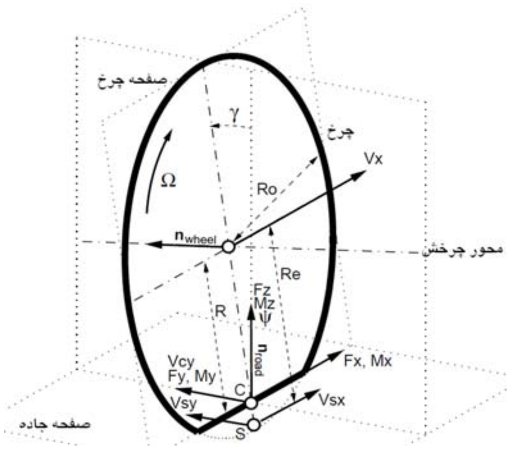
زاویه لغزش (Slip Angle) (α). زاویه لغزش α در حالت کلی برای تایر به‌صورت زیر تعریف می‌شود که در آن V_x و V_y به ترتیب سرعت تایر در جهت‌های x و

y در دستگاه مختصات تایر مطابق شکل (۲) می‌باشد.

$$\alpha = \mathrm{arctg}(\frac{V_y}{V_x}) \qquad (۱)$$

طول تماس تایر با زمین (Contact Length) (2a). محدوده‌ای که در آن تایر با زمین در تماس می‌باشد. در این محدوده فرض می‌شود که لغزشی اتفاق نیفتاده و جابجایی عرضی تایر در آن یکسان می‌باشد.

طول بازوی چرخ (Caster Length) (e). فاصله افقی بین محل اتصال ارابه فرود با بدنه، تا پین مرکز چرخ. این فاصله می‌تواند در جلوی چرخ، یا در عقب آن باشد (شکل ۳).



شکل ۲ نمایش صفحه تایر و برخی از پارامترهای آن [12]

طول آرامش تایر (Relaxation Length) (σ). محدوده‌ای خارج از طول تماس تایر، که در آن جابجایی عرضی، صفر نیست، و با یک معادله نمایی از جابجایی عرضی محدوده تماس حاصل می‌شود.

با توجه به آنچه گفته شد، تغییر زاویه لغزش تایر را می‌توان ناشی از دو حرکت اصلی دانست. لغزش خالص و انحراف خالص. یک تایر زمانی دارای لغزش خالص است، که امکان تغییر در زاویه پیچشی ψ وجود داشته باشد در حالیکه مقدار جابجایی ثابت و تغییرات آن برابر صفر باشد. بالعکس تایر زمانی دارای انحراف خالص است؛ که جابجایی عرضی تغییر نماید، در حالی که لغزش ثابت و تغییرات آن برابر صفر باشد.

جابجایی عرضی نقطه تماس تایر، y را می‌توان با یک معادله دیفرانسیل درجه یک با تعریف ثابت زمانی $\tau = \sigma/v$ توصیف نمود، که در آن σ همان طول آرامش تایر است [8].

حال می‌توان سرعت انحراف V_t را، به صورت زیر بیان نمود.

$$V_t = \dot{y} + \frac{y}{\tau} \qquad (۲)$$

اما در حرکت چرخش خالص، که ناشی از غلتش تایر است، سرعت چرخش به صورت زیر تعریف می‌شود.

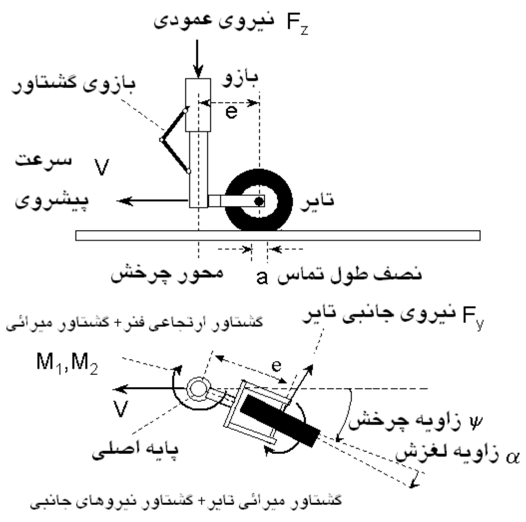
$$V_r = V\psi + (e-a)\dot{\psi} \qquad (۳)$$

در حرکت معمولی چرخ، این دو سرعت باید با هم برابر باشند. لذا داریم:

$$V_r = V_t \Rightarrow \dot{y} + \frac{V}{\sigma} y = V\psi + (e-a)\dot{\psi} \qquad (٤)$$

همان‌گونه که از شکل (۳) نیز می‌توان دریافت رابطه تقریبی زیر قابل قبول می‌باشد.

$$\alpha \approx \mathrm{arctg}(\alpha) = \frac{y}{\sigma} \qquad (۵)$$



شکل ۳ شمایی از ارابه فرود و گشتاورهای وارده بر آن [10]

با قرار دادن رابطه (۵) در رابطه (٤)، این رابطه بر حسب زاویه لغزش و زاویه پیچشی ψ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{\alpha}+\frac{V}{\sigma}\alpha=\frac{V}{\sigma}\psi+\frac{(e-a)}{\sigma}\dot{\psi} \qquad (٦)$$

همان‌گونه که در شکل نیز نشان داده شده است، اثرات دینامیک پیچشی در قسمت‌های پائین ارابه فرود در صفحه افقی را می‌توان با یک معادله دیفرانسیلی درجه دو، مدل‌سازی نمود. این معادله از اثر چهار ممان خارجی بر روی ارابه فرود تشکیل شده است [8].

$$I_z\ddot{\psi}+M_1+M_2+M_3+M_4=0 \qquad (٧)$$

که در این معادله I_z ممان اینرسی ارابه نسبت به محور z و ψ زاویه چرخشی تایر می‌باشد. حال هر یک از ممان‌های وارده جداگانه تعریف می‌شوند.

ممان اول M_1 که از اثر ارتجاعی فنر، بازوی چرخ و گردش چرخ حول محور آن حاصل می‌شود. این ممان را به صورت خطی و نسبت به زاویه ψ با ضریب ثابت k در نظر می‌گیریم.

$$M_1=k\psi \qquad (٨)$$

ممان دوم حاصل از ترکیب اثرات میرائی حاصل از اصطکاک ویسکوز داخل یاتاقان‌ها و میراکننده shimmy می‌باشد که آن هم به صورت خطی و با ضریب ثابت c نسبت به سرعت زاویه‌ای $\dot{\psi}$ در نظر گرفته شده است.

$$M_2=c\dot{\psi} \qquad (٩)$$

اثرات میرائی تایر که بوسیله شیارهای روی تایر ایجاد می‌شود، با ممان M_3 نشان داده شده است. مقدار این ممان وابسته به سرعت و سرعت زاویه‌ای پیچشی $\dot{\psi}$ می‌باشد.

$$M_3=\frac{\kappa}{V}\dot{\psi} \qquad (١٠)$$

ضریب این ممان نیز که ضریب ممان دندانه‌های تایر نامیده می‌شود، از معادله زیر حاصل می‌شود [11].

$$\kappa=0.15\times a^2 c_{f\alpha}F_z \qquad (١١)$$

اثر نیروی جانبی F_y و گشتاور همسوگر وارد بر تایر M_z در ممان چهارم یعنی M_4 نهاده شده است. این ممان به عنوان یک تابع غیرخطی در نظر گرفته می‌شود، که از ترکیب نیروی جانبی و گشتاور همسوگر به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$M_4=M_z+eF_y \qquad (١٢)$$

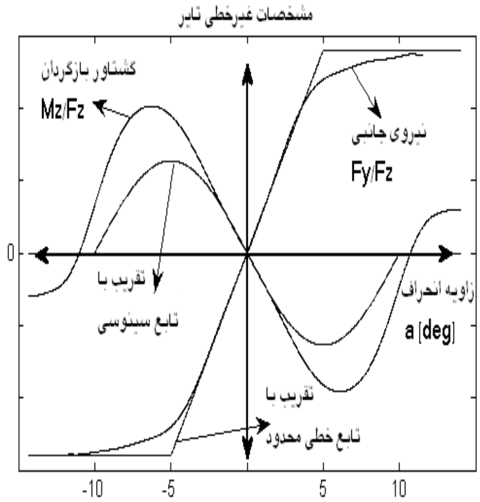
مقدار این نیرو و گشتاور بسته به نیروی عمودی تایر F_z و زاویه لغزش آن α می‌باشد. این وابستگی در شکل (٤) مشهود می‌باشد.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود نیروی جانبی F_y تابعی غیرخطی از نیروی عمودی و زاویه لغزش می‌باشد. لذا برای تعیین F_y باید از رابطه‌ای تقریبی استفاده نمود. در همین راستا روابط متفاوتی وجود دارد. اما مشهورترین آن‌ها که در شکل نیز مشخص شده است رابطه غیرخطی زیر می‌باشد، که در آن δ محدوده تغییرات α تعریف شده است [8].

$$\begin{cases} F_y=c_{f\alpha}\alpha F_z & |\alpha|\le\delta \\ F_y=c_{f\alpha}\delta F_z\,\mathrm{sign}(\alpha) & |\alpha|>\delta \end{cases} \qquad (١٣)$$

برای توصیف گشتاور همسوگر نیز، همان‌گونه که در شکل (٤) مشخص شده، از یک تقریب نیم‌پریود از تابع سینوس که بین دو مقدار حدی زاویه α_g، محدود شده است استفاده می‌شود.

$$\begin{cases} M_z=F_z c_{m\alpha}\dfrac{\alpha_g}{180}\sin(\dfrac{180}{\alpha_g}\alpha) & |\alpha|\le\alpha_g \\ M_z=0 & |\alpha|>\alpha_g \end{cases} \qquad (١٤)$$



شکل ٤ مشخصات غیرخطی تایر [12]

در نهایت با قرار دادن مقادیر بهدست آمده از معادلات (١٤ و ١٣) در معادله (١٢) عبارت زیر برای ممان M_4 حاصل می‌شود:

$$M_4=\begin{cases} ec_{f\alpha}\delta F_z \operatorname{sign}(\alpha) & \alpha\le-\alpha_g \\ F_z c_{m\alpha}\dfrac{\alpha_g}{180}\sin\left(\dfrac{180}{\alpha_g}\alpha\right)+ \\ ec_{f\alpha}\delta F_z \operatorname{sign}(\alpha) & -\alpha_g\le\alpha\le-\delta \\ F_z c_{m\alpha}\dfrac{\alpha_g}{180}\sin\left(\dfrac{180}{\alpha_g}\alpha\right)+ \\ ec_{f\alpha}\alpha F_z & -\delta\le\alpha\le\delta \\ F_z c_{m\alpha}\dfrac{\alpha_g}{180}\sin\left(\dfrac{180}{\alpha_g}\alpha\right)+ \\ ec_{f\alpha}\delta F_z \operatorname{sign}(\alpha) & \delta\le\alpha\le\alpha_g \\ ec_{f\alpha}\delta F_z \operatorname{sign}(\alpha) & \alpha>\alpha_g \end{cases}$$

(١٥)

با جای‌گذاری مقادیر گشتاورهای بهدست آمده در معادله (٧)، دو معادله اصلی مسأله بر حسب زاویه لغزش α و زاویه پیچشی ψ بهدست می‌آید معادله‌های (٧ و ٦).

تحلیل *Shimmy* به کمک مقادیر ویژه

همان‌گونه که گفته شد، معادله‌های (٧و٦) بر حسب زاویه لغزش و زاویه پیچشی حاصل شد. معادله (٦)، یک معادله خطی می‌باشد. اما معادله (٧) به دلیل وجود جمله غیرخطی M_4، غیرخطی می‌باشد. به همین دلیل جهت انجام تحلیل خطی، باید ابتدا این معادله را خطی‌سازی نمود. عوامل غیرخطی این معادله عبارتند از: نیروی جانبی F_y، و ممان همسوگر M_z. همان‌گونه که در شکل (٤) پیداست، و همچنین از معادله (١٣) می‌توان فهمید که F_y/F_z تابعی قطعه‌ای خطی، از زاویه لغزش α می‌باشد. که مقدار آن در بین دو حد داده شده، تابعی خطی با شیب $c_{f\alpha}$ می‌باشد، و خارج از این محدوده، تابع ثابت می‌باشد. لذا برای حذف اثر غیرخطی (خطی‌سازی)، مقدار α را کوچک در نظر می‌گیریم. بنابراین می‌توان معادله (١٣) را به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\frac{F_y}{F_z}=c_{f\alpha}\alpha \qquad (١٦)$$

اثر غیرخطی دیگر مربوط به گشتاور همسوگر M_z می‌باشد. نسبت این گشتاور نیز M_z/F_z، با توجه به شکل (٤) و معادله (١٤)، در بین دو مقدار حدی ذکر شده، تابعی تقریبا سینوسی از زاویه لغزش α می‌باشد. اما در خارج این محدوده ثابت و برابر صفر است. در اینجا نیز به جهت حذف اثر غیرخطی، مقدار α کوچک در نظر گرفته می‌شود. در این حالت تنها مقدار داخل محدوده، مد نظر قرار می‌گیرد. از طرف دیگر با توجه به کوچک فرض کردن مقدار زاویه لغزش، می‌توان رابطه زیر را معتبر دانست.

$$\sin\left(\frac{180}{\alpha_g}\alpha\right)\approx\frac{180}{\alpha_g}\alpha \qquad (١٧)$$

با این فرضیات معادله (١٤)، به معادله خطی زیر با

شیب $c_{m\alpha}$ تبدیل می‌گردد.

$$\frac{M_z}{F_z} = c_{m\alpha}\alpha \qquad (۱۸)$$

پس از جای‌گذاری مقادیر خطی‌سازی شده در معادله (۷)، معادله‌های (۷و۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{\alpha} = \frac{V}{\sigma}\psi + \frac{(e-a)}{\sigma}\dot{\psi} - \frac{V}{\sigma}\alpha \qquad (۱۹)$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{k}{I_z}\psi - \frac{c}{I_z}\dot{\psi} - \frac{\kappa}{VI_z}\dot{\psi} - \frac{(c_{m\alpha}+ec_{f\alpha})F_z}{I_z}\alpha \qquad (۲۰)$$

با در نظر گرفتن رابطه $d\psi/dt = \dot{\psi}$ برای تشکیل فضای حالت، می‌توان سه معادله حاصل را در یک دستگاه ماتریسی ۳×۳ نمایش داد.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\psi\\ \dot{\psi}\\ \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ m_1 & m_2 & m_3\\ m_4 & m_5 & m_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi\\ \dot{\psi}\\ \alpha\end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

که المان‌های ماتریس ضرائب عبارتند از:

$$m_1 = -\frac{k}{I_z} \qquad m_4 = \frac{V}{\sigma}$$
$$m_2 = -\frac{c}{I_z} - \frac{\kappa}{VI_z} \qquad m_5 = \frac{e-a}{\sigma} \qquad (۲۲)$$
$$m_3 = -\frac{(c_{m\alpha}+ec_{f\alpha})F_z}{I_z} \qquad m_6 = -\frac{V}{\sigma}$$

معادله مشخصه این ماتریس نیز به این صورت حاصل می‌شود:

$$s^3 - (m_2+m_6)s^2 + (m_2m_6 - m_1 - m_3m_5)s + (m_1m_6 - m_4m_3) = 0 \qquad (۲۳)$$

به جهت بررسی پایداری در مدل ارائه شده، به هر یک از پارامترها مقداری اختصاص می‌یابد. این مقادیر مربوط به یک هواپیمای سبک می‌باشد که درجدول (۱) ارائه گردیده است [8].

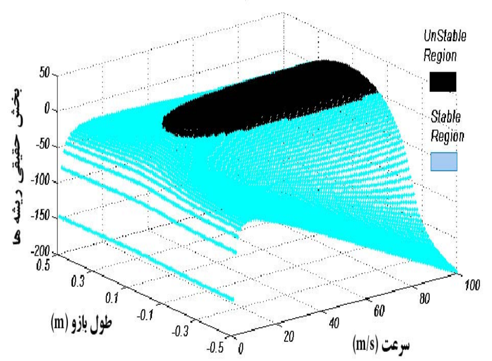
جدول ۱ مقادیر عددی پارامترهای داده شده [8]

پارامتر	مقدار	واحد
سرعت V	۵۰	m/s
طول بازوی چرخ e	۰/۱	m
ضریب ارتجاعی فنر پیچشی k	۱۰۰	KN.m/rad
ضریب میرائی پیچشی c	۵۰	N.m/rad/s
نیروی عمودی F_z	۹	KN
نصف طول تماس a	۰/۱	m
طول آرامش σ=3a	۰/۳	m
ممان اینرسی I_z	۱	Kgm^2
ضریب نیروی جانبی $c_{f\alpha}$	۲۰	1/rad
ضریب گشتاور همسوگر $c_{m\alpha}$	۲	m/rad
ثابت گشتاور میرائی دندانه‌های چرخ κ	۲۷۰	$N.m^2/rad$
حدود زاویه لغزش برای گشتاور همسوگر α_g	۱۰	deg
حدود زاویه لغزش برای نیروی جانبی δ	۵	deg

با محاسبه ریشه‌های این معادله و تعیین مقادیر ویژه ماتریس می‌توان با کمک معیار پایداری روث-هورویتس به بررسی پایداری سیستم پرداخت. این معادله دارای سه ریشه می‌باشد. یک ریشه حقیقی و دو ریشه مختلط مزدوج. بر اساس معیار پایداری روث، اگر بخش حقیقی هر یک از ریشه‌ها در سمت راست محور موهومی قرار گیرد، سیستم ناپایدار می‌شود.

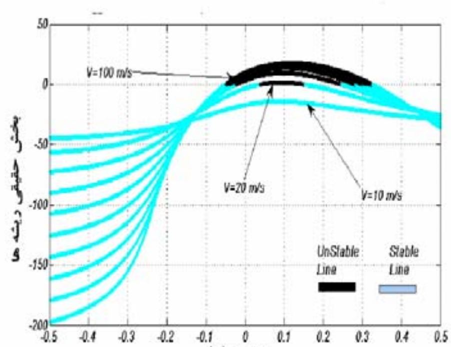
با بررسی مشخص می‌گردد که ریشه حقیقی معادله مشخصه همیشه منفی بوده و شرط پایداری را برآورده می‌نماید. از همین رو تحلیل پایداری تنها بر روی بخش حقیقی دو ریشه مختلط مزدوج انجام می‌گیرد. در اینجا یک محدوده تغییرات از ۰ تا ۱۰۰m/s برای سرعت V، و از۰/۵m- تا ۰/۵m برای طول بازوی چرخ e، با ضریب ارتجاعی فنر ۵۰KN.m/rad و ضریب میرائی ۲۵N.m/rad/s فرض می‌کنیم. سایر مقادیر مطابق با جدول (۱) می‌باشند. نتایج در شکل‌های زیر ارائه گردیده‌اند. در شکل (۵)، در یک نمودار سه‌بعدی، تغییرات سرعت (Velocity)

بر روی محور xها، تغییرات طول بازوی چرخ بر روی محور yها، و در محور zها بخش حقیقی ریشه مختلط رسم گردیده است. محدوده پایدار، محدوده‌ای که در زیر صفر محور zها قرار می‌گیرد، با رنگ روشن، و محدوده ناپایدار، محدوده‌ی بالای صفر محور zها، با رنگ تیره مشخص گردیده‌اند.



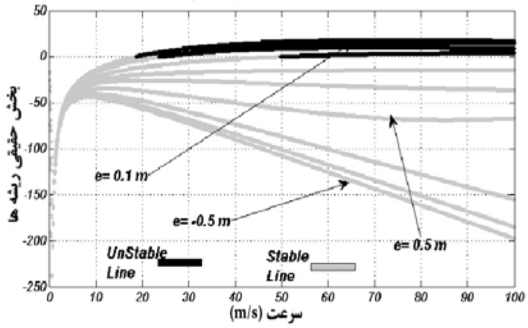
شکل ۵ نمایش پایداری ریشه‌ها در نمودار سه‌بعدی بر حسب تغییرات سرعت و طول بازوی چرخ

در شکل (٦)، همان نمودار در دوبعد و برحسب تغییرات طول بازوی چرخ، برای چند مقدار مختلف سرعت رسم شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، محدوده ناپایدار در طول بازوی بین ۰/۰۵m− تا ۰/۳۵m متر، و برای سرعت‌های بالای ۲۰m/s حادث می‌شود.



شکل ٦ بررسی پایداری ریشه‌ها در نمودار دوبعدی بر حسب تغییرات طول بازوی چرخ برای سرعت‌های مختلف

در شکل (۷)، نمودار دوبعدی، این‌بار برحسب تغییرات سرعت، و برای مقادیر مختلف طول بازو رسم شده است. مشاهده می‌شود که، با افزایش سرعت، محدوده ناپایداری افزایش می‌یابد. همچنین بیشترین ناپایداری نیز در طول بازوی ۰/۱m قرار می‌گیرد.



شکل ۷ نمایش پایداری ریشه‌ها در نمودار دوبعدی بر حسب تغییرات سرعت برای طول بازوهای مختلف

مرزهای پایداری

معادله مشخصه سیستم معادله (۲۳) بر حسب متغیر مختلط s می‌باشد. آنچه در اینجا مورد نظر است، تعیین مرزی برای پایداری سیستم است. با استناد به معیار پایداری روث، این مرز در جایی اتفاق می‌افتد که بخش حقیقی ریشه‌ها از مقادیر مثبت (ناپایدار) به مقادیر منفی (پایدار) و یا بالعکس تغییر علامت دهند. با توجه به آنچه ذکر شد می‌توان فهمید که این در هنگامی حادث می‌شود که بخش حقیقی دو ریشه‌ی مختلط مزدوج، برابر صفر گردد. یعنی این دو ریشه به دو ریشه موهومی خالص تبدیل شوند. از این‌رو، اگر در معادله مشخصه سیستم، به جای s (ریشه مختلط)، عبارت $i\omega$ (ریشه موهومی خالص)، را قرار داده و معادله مختلط حاصل را حل نماییم، مقادیر مرزی مشخص می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\left[(m_2+m_6)\omega^2+m_1m_6-m_4m_3\right]\\&-i\omega\left[\omega^2-m_2m_6+m_1+m_3m_5\right]=0\end{aligned} \qquad (۲٤)$$

مشاهده می‌شود که معادله حاصل را باید به دو بخش حقیقی و موهومی تقسیم نمود.

$$\omega^2 - m_2 m_6 + m_1 + m_3 m_5 = 0 \qquad (۲۵)$$

$$(m_2 + m_6)\omega^2 + m_1 m_6 - m_4 m_3 = 0 \qquad (۲۶)$$

با جای‌گذاری از یک معادله در معادله دیگر، رابطه‌ای حاصل می‌شود. در این رابطه مقادیر ضریب‌ها را جای‌گذاری می‌کنیم. حال این رابطه را می‌توان بر حسب یکی از پارامترها (به طور مثال طول بازوی چرخ (e)) مرتب نمود. آنگاه با تغییر مقادیر پارامترهای دیگر (مانند سرعت V و یا ضریب میرایی c و یا هر دو)، و حل معادله حاصل برای پارامتر اولیه (e)، مقادیر مرز پایداری برای آن پارامتر(e) را مشخص نمود. به‌این ترتیب می‌توان تاثیر تغییر در هر پارامتر را بر روی محدوده پایداری مشاهده کرد. در ادامه این کار بر روی چند پارامتر انجام شده است.

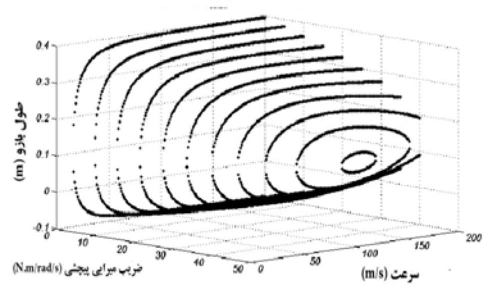
تعیین مرزهای پایداری بر حسب طول بازوی چرخ. با مرتب کردن معادله نهایی بر حسب طول بازوی چرخ، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$L_1(V)e^2 + L_2(V)e + L_3(V) = 0 \qquad (۲۷)$$

که ضرائب آن عبارتند از:

$$\begin{aligned}
&L_1 = -F_z c_{f\alpha}\left(\sigma c V + \sigma\kappa + I_z V^2\right)\\
&L_2 = F_z\left(\left(a c_{f\alpha} - c_{m\alpha}\right)\left(\sigma\kappa + \sigma c V + I_z V^2\right) +\right.\\
&\left. I_z \sigma V^2 c_{f\alpha}\right)\\
&L_3 = -V^2\sigma\left(I_z\kappa + I_z c V + c^2\sigma\right) -\\
&k\sigma^3\left(\kappa + cV\right) - \kappa\sigma^2\left(\kappa + 2cV\right) +\\
&F_z c_{m\alpha}\left(I_z\sigma V^2 + I_z a V^2 + a\sigma c V + a\sigma\kappa\right)
\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

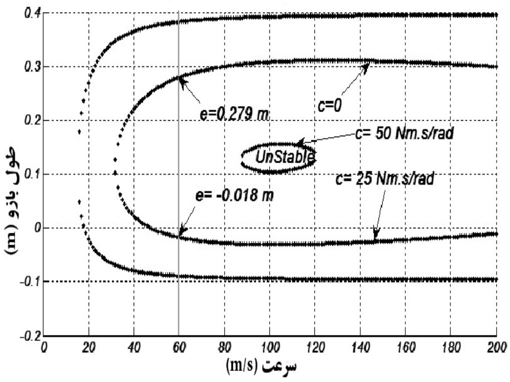
با حل این معادله درجه دو، برای هر مقدار سرعت V با تغییر مقادیر ضریب میرائی *c*، دو مقدار برای طول بازوی چرخ حاصل می‌گردد. هر دو مقدار به‌دست آمده معتبر بوده و این مقادیر نشان‌دهنده حالت مرزی در سیستم می‌باشد. با تعیین مقادیر مرزی، طول بازو برای یک محدوده سرعت، از صفر تا ۲۰۰m/s، و تغییر مقادیر ضریب میرائی در محدوده صفر تا ۵۰N.m/rad/s، دو شاخه مجزا حاصل می‌گردد. این دو شاخه یک شکل بسته را تشکیل می‌دهند، که در نقاط داخل شکل (بین دو شاخه) سیستم در حالت ناپایدار و در خارج آن پایدار می‌باشد. نمودار سه‌بعدی حاصل در شکل (۸) نشان داده شده است. مشاهده می شود که با افزایش ضریب میرائی، محدوده ناپایداری کاهش می‌یابد.



شکل ۸ مرزهای پایداری با تغییر میرائی، سرعت و طول بازوی چرخ (داخل نمودار ناپایدار و خارج آن پایدار)

در شکل (۹)، نمودار پایداری در دوبعد و در صفحه طول بازوی چرخ بر حسب سرعت، و برای چند مقدار متفاوت ضریب میرائی رسم شده است. در اینجا نیز نسبت معکوس محدوده ناپایدار با ضریب میرائی مشاهده می‌شود. خطی که در سرعت ۶۰m/s رسم شده است؛ در دو مقدار نشانه‌گذاری گردیده است. یکی در طول بازوی ۰/۰۱۷۵۲m- که اولین نقطه تقاطع با محور با ضریب میرائی ۲۵N.m/rad/s می‌باشد. یعنی در سرعت ثابت ۶۰m/s و میرائی ثابت ۲۵N.m/rad/s، با افزایش طول بازو، در این طول (۰/۰۱۷۵۲m-)، سیستم از حالت پایدار به ناپایدار

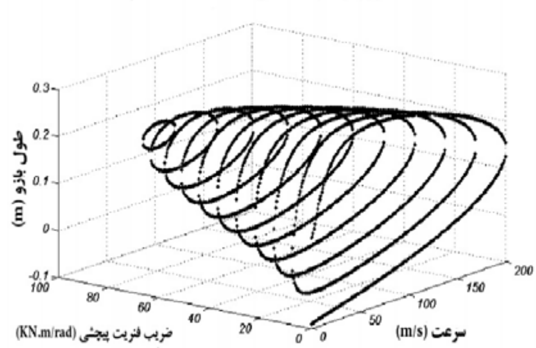
تغییر حالت می‌دهد (مرز پایداری سیستم). برعکس این اتفاق در طول بازوی ۰/۲۷۹m متر می‌افتد؛ که در آن سیستم از حالت ناپایدار به پایدار تغییر حالت می‌دهد.



شکل ۹ مرزهای پایداری با تغییر سرعت و طول بازوی چرخ برای مقادیر مختلف ضریب میرائی

در حالتی دیگر، این بار در معادله (۲۷) برای هر مقدار سرعت V با تغییر مقادیر ضریب ارتجاعی فنر پیچشی k، دو مقدار برای طول بازو e به‌دست می‌آید. که برای سرعت مقادیر در محدوده صفر تا ۲۰۰m/s و تغییرات ضریب ارتجاعی فنر در محدوده صفر تا 10^6N.m/rad می‌باشد. در این محدوده نیز دو مقدار برای e حاصل می‌شود. همان‌گونه که در شکل (۱۰) نیز مشاهده می‌شود، با رسم این مقادیر دو شاخه همگرا، یا یک شکل بسته دیگر به‌دست می‌آید. سیستم در نقاط درون این شکل (بین دو شاخه) ناپایدار، و در نقاط خارج از شکل، پایدار می‌باشد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب ارتجاعی فنر، محدوده ناپایدار کاهش می‌یابد.

در شکل (۱۱)، همان نمودار پایداری، به‌صورت دوبعدی و در صفحه طول بازو بر حسب سرعت، برای چند مقدار ضریب ارتجاعی فنر رسم گردیده است. در اینجا نیز اثر معکوس تغییر ضریب ارتجاعی فنر بر محدوده ناپایداری مشاهده می‌شود. در این شکل خطی در طول بازوی ۰/۲m متر رسم شده است؛ که محور با ضریب ارتجاعی ۵۰KN.m/rad را در دو نقطه، که همان مرزهای پایداری سیستم می‌باشند، قطع می‌کند. سیستم با طول بازوی ۰/۲m و ضریب ارتجاعی فنر ۵۰KN.m/rad ابتدا در سرعت ٤۷m/s از حالت پایدار به ناپایدار، و سپس در سرعت ۱۵۳m/s از حالت ناپایدار به پایدار، تغییر حالت می‌دهد. این موضوع در بخش مدل‌سازی غیرخطی سیستم، بررسی می‌گردد.



شکل ۱۰ مرزهای پایداری با تغییر سرعت، ضریب ارتجاعی فنر و طول بازوی چرخ (داخل نمودار ناپایدار و خارج آن پایدار)

تعیین مرزهای پایداری بر حسب c. این‌بار با مرتب کردن معادله بر حسب ضریب میرائی سیستم c، عبارت زیر حاصل می‌شود:

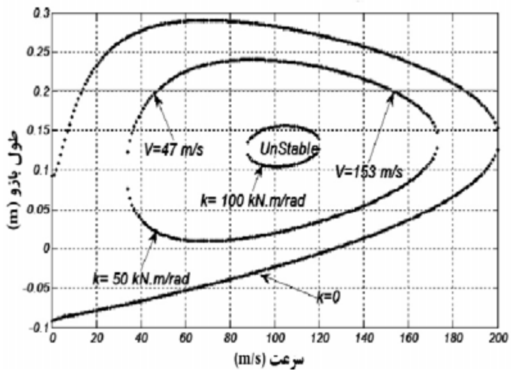
$$L_1(V)c^2+L_2(V)c+L_3(V)=0 \quad (۲۹)$$

که ضرائب آن عبارتند از:

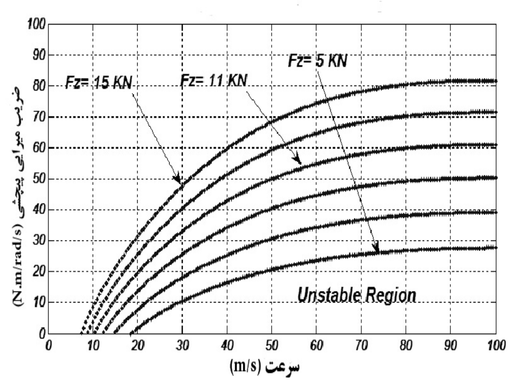
$$\begin{aligned} L_1 &= -V^2\sigma \\ L_2 &= V(F_z\sigma(c_{m\alpha}+ec_{f\alpha})(a-e)- \\ &\left(\sigma^2 k+I_z V^2+2\kappa\sigma\right)) \\ L_3 &= -\kappa\left(I_z V^2+\sigma\kappa+\sigma^2 k\right)+ \\ &F_z\left(c_{m\alpha}+ec_{f\alpha}\right)(a-e+\sigma)\left(\sigma\kappa+I_z V^2\right) \end{aligned} \quad (۳۰)$$

با حل این معادله درجه دو برای هر مقدار سرعت V با تغییر مقادیر نیروی عمودی F_z، دو مقدار برای

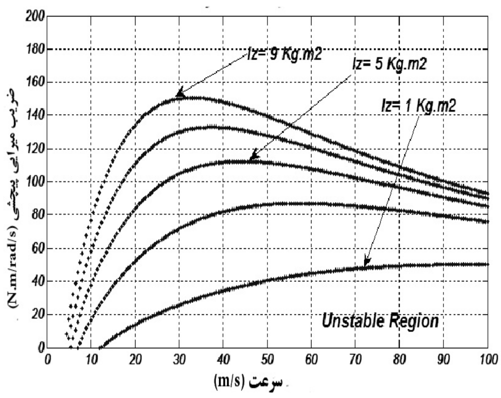
ضریب میرائی c حاصل می‌گردد. یکی از دو مقدار به‌دست آمده بسیار بزرگ و منفی بوده، لذا عملاً مقداری نامعتبر می‌باشد. اما مقدار دیگر در حد معقول و قابل‌پذیرش است؛ که این مقدار نشان‌دهنده حالت مرزی در سیستم می‌باشد. مقدار مرزی ضریب میرائی برای یک محدوده سرعت از صفر تا ۱۰۰m/s، و چند مقدار مختلف برای نیروی عمودی F_z، از ۵KN تا ۱۵KN، محاسبه گردیده است؛ نقاطی که کمتر از این حد می‌باشند، سیستم در آن نقاط در حالت ناپایدار بوده و در نقاط بیشتر از آن، سیستم پایدار می‌باشد. نمودار حاصل در شکل (۱۲) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش میزان بار عمودی، محدوده ناپایداری نیز افزایش می‌یابد. همچنین افزایش سرعت نیز، سبب افزایش محدوده ناپایدار می‌گردد. اما افزایش میرائی سبب کاهش محدوده ناپایداری می‌شود.



شکل ۱۱ مرزهای پایداری با تغییر سرعت و طول بازوی چرخ برای مقادیر مختلف ضریب ارتجاعی فنر



شکل ۱۲ مرزهای پایداری با تغییر ضریب میرائی و سرعت برای مقادیر مختلف نیروی عمودی

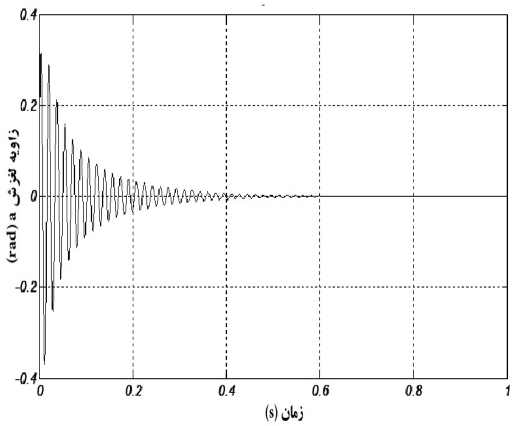


شکل۱۳ مرزهای پایداری با تغییر ضریب میرائی و سرعت، برای مقادیر مختلف ممان اینرسی

در مرحله‌ای دیگر، معادله (۲۹)، برای هر مقدار سرعت V با تغییر مقادیر ممان اینرسی حول محور zها I_z، حل شده و باز دو مقدار برای ضریب میرائی c حاصل می‌گردد. در اینجا نیز یکی از دو مقدار به‌دست آمده بسیار بزرگ و منفی بوده، لذا عملا مقداری نامعتبر می‌باشد. اما مقدار دیگر در حد معقول و قابل‌پذیرش است؛ که این مقدار نیز نشان‌دهنده حالت مرزی در سیستم می‌باشد. مقدار مرزی ضریب میرائی برای یک محدوده سرعت از صفر تا ۱۰۰m/s، و چند مقدار مختلف برای ممان اینرسی I_z، از ۱$Kg.m^2$ تا ۹$Kg.m^2$، محاسبه گردیده است. نقاطی که پایین این حد قرار دارند، سیستم در آن نقاط در حالت ناپایدار بوده و در نقاط بالای آن سیستم پایدار می‌باشد. نمودار حاصله در شکل (۱۳) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش میزان ممان اینرسی، محدوده ناپایداری نیز افزایش می‌یابد. اما افزایش سرعت، در سرعت‌های بالای ۳۰m/s متربرثانیه، سبب افزایش محدوده پایدار می‌گردد. افزایش میرائی نیز سبب کاهش محدوده ناپایدار می‌شود.

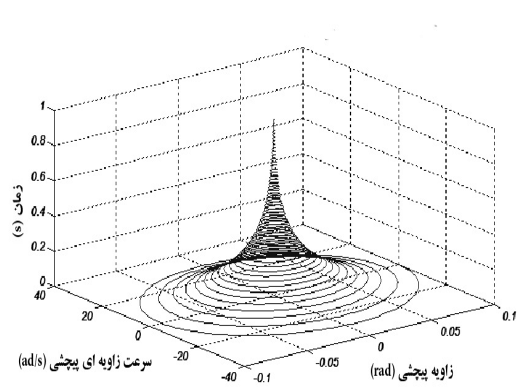
مدل‌سازی سیستم غیرخطی. در این بخش به کمک حل عددی معادله غیرخطی، دینامیک سیستم

شبیه‌سازی شده است. این عمل در محیط سیمولینک (SIMULINK) نرم‌افزار MATLAB اجرا شده است. در این شبیه‌سازی حل معادله نسبت به زمان t به‌دست می‌آید. روش حل روش Dormand-Prince (ode45) با گام متغیر و حداکثر طول گام $1e^{-4}$ در طول یک ثانیه می‌باشد.

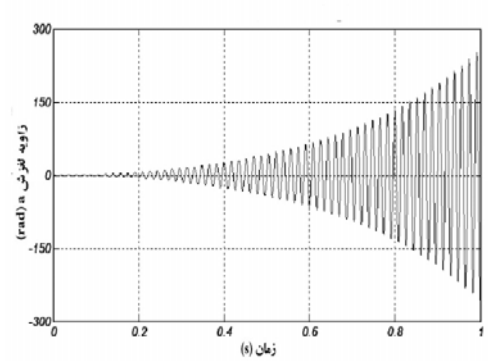


شکل ۱۴ نمودار زاویه لغزش α در برابر زمان، حالت پایدار

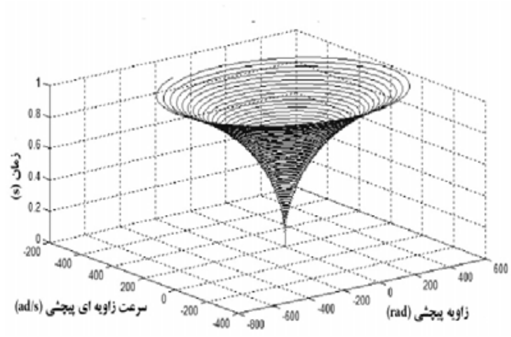
در اینجا هدف این است که به کمک حل عددی معادله غیرخطی اولیه، صحت نتایج به‌دست آمده در بخش خطی‌سازی، مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور و با توجه به زمان‌گیر بودن حل عددی، این بررسی تنها بر روی دو مورد از مرزهای پایداری، که پیش‌تر تعیین شده، صورت می‌گیرد.



شکل ۱۵ نمودار فضای حالت زاویه پیچشی ψ نسبت به زمان حالت پایدار



شکل ۱۶ نمودار زاویه لغزش α در برابر زمان، حالت ناپایدار



شکل ۱۷ نمودار فضای حالت زاویه پیچشی ψ نسبت به زمان حالت ناپایدار

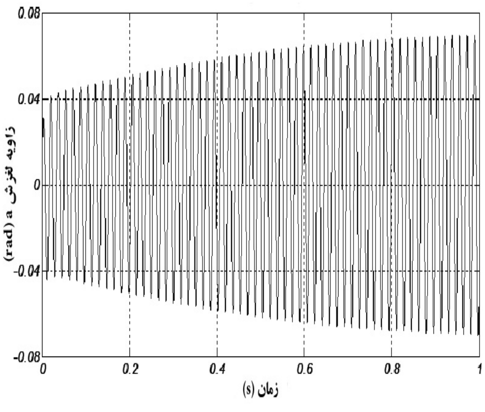
ابتدا یادآوری این نکته ضروری به نظر می‌رسد که با رسم نمودار نسبت به زمان حل معادله غیرخطی، مشاهده می‌شود: در مقادیری که سیستم خطی پایدار می‌باشد، دامنه ارتعاشات نمودار زاویه لغزش و یا نمودار فازی زاویه پیچشی ψ نسبت به زمان، مطابق با مدل‌سازی خطی به حالت پایدار میل می‌کند و نمودار به صفر همگرا می‌شود شکل (۱۵ و ۱٤).

اما در مقادیری که ناپایداری خطی مشاهده می‌شود، در مدل‌سازی غیرخطی سه حالت ممکن است به‌وجود بیاید: در اولین حالت در مدل غیرخطی نیز ناپایداری مشاهده شده و دامنه ارتعاشات نمودارهای پاسخ زمانی به صورت واگرا، با افزایش زمان، پیوسته افزایش می‌یابند شکل (۱۷ و ۱٦).

در بعضی حالات ناپایداری در مدل‌های خطی، در

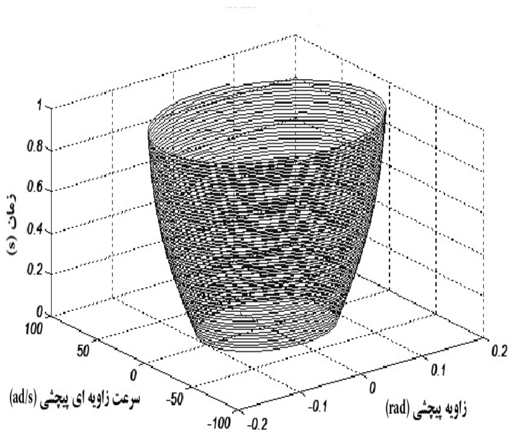
مدل غیرخطی سیستم، یک دامنه ارتعاشاتی پایدار مشاهده می‌شود. در حقیقت در این نقاط، سیستم دارای یک نقطه تعادل ناپایدار است؛ اما دارای یک چرخه‌حدی پایدار، حول این نقطه تعادل می‌باشد. این چرخه‌حدی در نمودارهای فضای حالت، آشکار می‌گردد. در این نمودارها، پس از مدتی، دامنه ارتعاشی ثابت شده و ارتعاش با فرکانس ثابت در دامنه ثابت ادامه می‌یابد. نمودار سه بعدی فضای حالت این سیکل‌ها نسبت به زمان به دو صورت ظاهر می‌گردد؛ که کاملا بستگی به شرایط اولیه مسأله دارد. در مقادیر کوچک برای مقدار اولیه زاویه پیچشی ψ ‏$(\psi)_0$=0.1rad مسیر با دامنه کم از داخل شروع شده و با افزایش دامنه به سمت چرخه حدی با دامنه ثابت ادامه می یابد شکل (۱۹ و ۱۸).

اما در مقادیر بزرگ برای مقدار اولیه (ψ_0=1rad) مسیر با دامنه بزرگ از خارج شروع شده و با کاهش دامنه در نهایت به چرخه حدی با دامنه ثابت خود می‌رسد شکل (۲۱ و ۲۰).

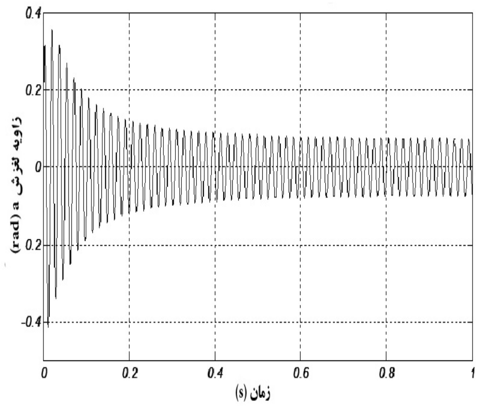


شکل ۱۸ نمودار زاویه لغزش α در برابر زمان

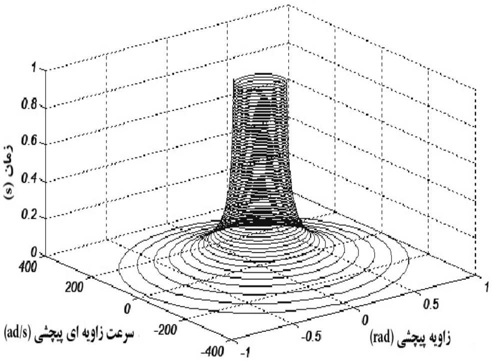
با بیان موضوع بالا، حال باید صحت مرزهای ارائه شده برای محدوده پایداری سیستم، که از روش‌های خطی‌سازی تعیین گردید، بررسی شود.



شکل ۱۹ نمودار فضای حالت زاویه پیچشی ψ نسبت به زمان. حالت چرخه حدی پایدار خارج شونده



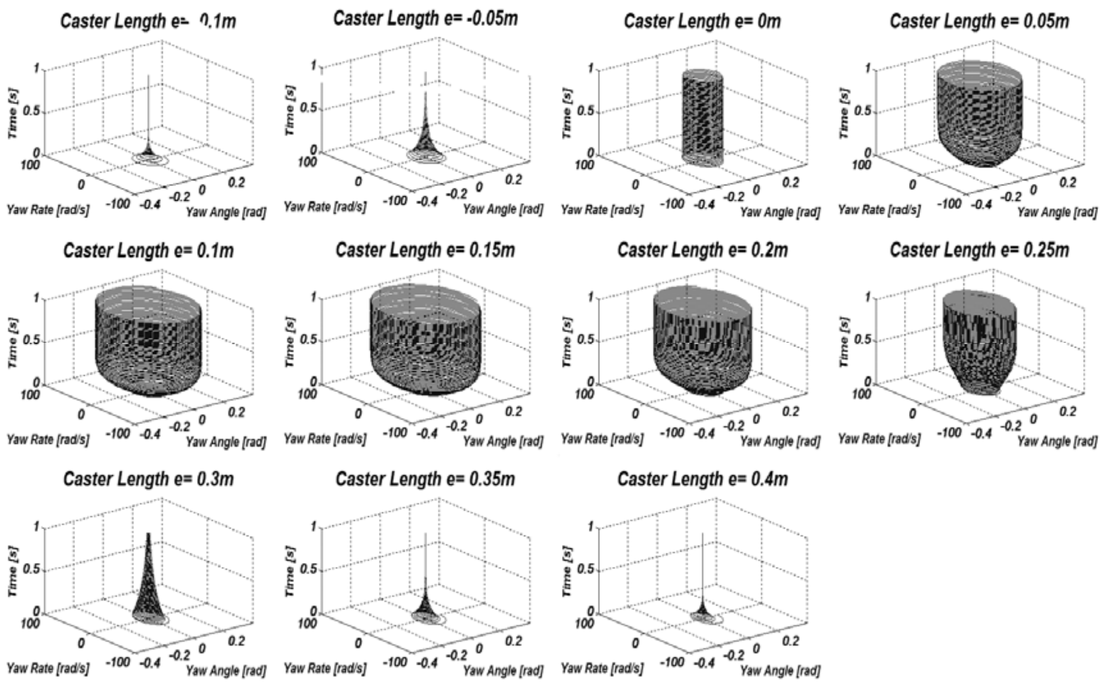
شکل ۲۰ نمودار زاویه لغزش α در برابر زمان



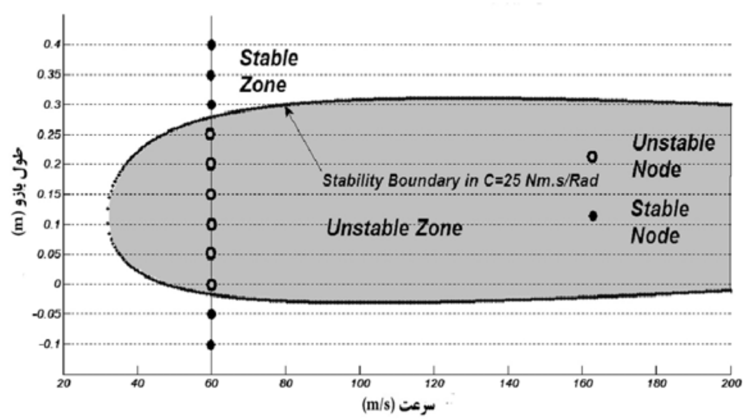
شکل ۲۱ نمودار فضای حالت زاویه پیچشی ψ نسبت به زمان حالت چرخه حدی پایدار داخل شونده

صحت سنجی

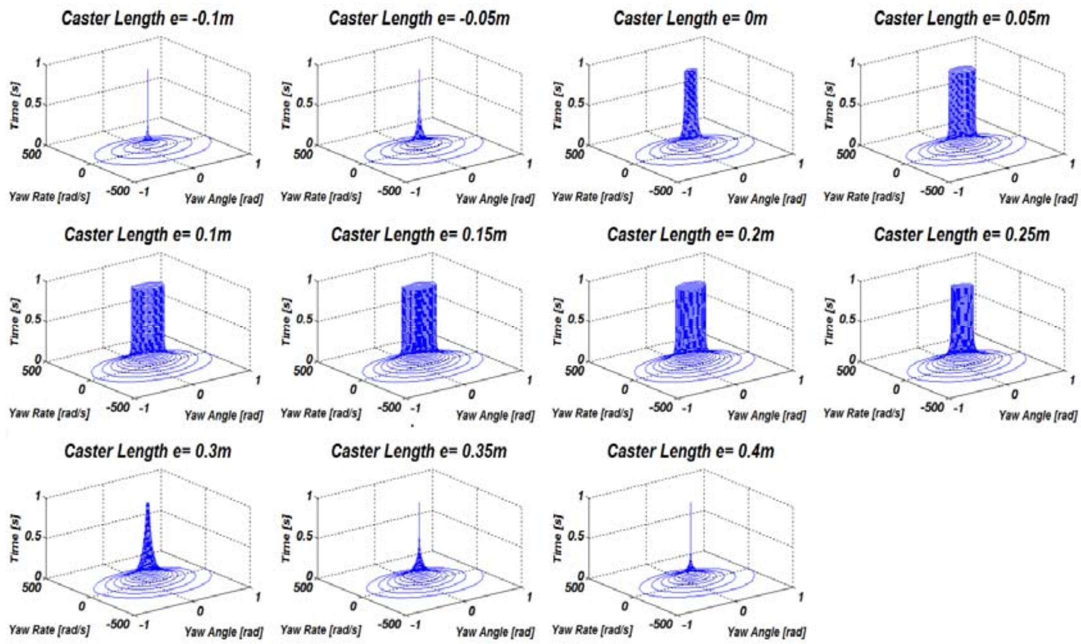
به منظور بررسی صحت نتایج به‌دست آمده از تحلیل سیستم خطی‌سازی شده، ابتدا مرز ارائه شده برای تغییر طول بازو که در شکل (۹) ارائه شد، تحلیل می‌شود. همان‌گونه که در شکل (۹) نیز مشاهده می‌شود، در سرعت ثابت ٦٠m/s، و میرائی ۲۵N.m/rad/s با افزایش طول بازو، دو تغییر حالت حاصل می‌گردد. اولی در طول بازوی ۰/۰۱۷۵۲m- از حالت پایدار به ناپایدار، و دیگری در طول ۰/۲۷۹m از حالت ناپایدار به پایدار. این مسأله به کمک حل عددی معادله غیرخطی، و در دو شکل زیر بررسی می‌گردد. در هریک از این دو شکل، همان‌گونه که مشاهده می‌شود، ۱۱ نمودار سه‌بعدی فضای حالت، نسبت به زمان رسم شده است. در همه این نمودارها سرعت ثابت و برابر ٦٠m/s و ضریب میرائی نیز ثابت و برابر ۲۵N.m/rad/s در نظر گرفته شده است. سایر پارامترهای مدل، به‌جز طول بازو نیز ثابت و برابر مقادیر داده شده در جدول (۱) می‌باشند. تنها عامل تغییر در این ۱۱ نمودار در شکل (۲۲) طول بازوی چرخ می‌باشد. مشاهده می‌شود که طول بازو از مقدار ۰/۱m- شروع شده؛ و با گام ۰/۰۵m تا طول ۰/٤m+ افزایش می‌یابد.لازم به یادآوری است که، پاسخ‌های ارائه شده در شکل (۲۲)، با شرایط اولیه کم (ψ_0=0.1rad) در نظر گرفته شده است. در این نمودارها محور xها، زاویه پیچشی ψ (rad)، محور yها، سرعت زاویه‌ای پیچشی $\dot{\psi}$ (rad/s)، و محور z ها، نمایانگر زمان t (s)، می‌باشند. مشاهده می‌شود که در دو حالت اول، پاسخ‌های زمانی، حالتی همگرا به صفر را دارا می‌باشند؛ و لذا نشان‌دهنده پایداری سیستم در این دو حالت است. اما از حالت سوم به بعد، شکل پاسخ زمانی به صورت چرخه‌حدی خارج‌شونده است؛ یعنی سیستم در نقطه تعادل مورد نظر ناپایدار می‌باشد. بنابراین از طول بازوی ۰/۰۵m- تا صفر از یک مرز ناپایداری (e=-0.01752m) عبور نموده‌ایم، که این با نتایج تحلیل پایداری خطی مطابقت دارد. اما دوباره از نمودار نهم به بعد سیستم به حالت پایدار خود برمی‌گردد. یعنی مرز دیگر در فاصله بین ۰/۲۵m تا ۰/۳m طول بازو (e=0.279m) قرار دارد که این نیز با نتایج تحلیل خطی مطابقت دارد.



شکل ۲۲ بررسی مرزهای پایداری، با تاثیر تغییر در طول بازوی چرخ، توسط حل عددی معادله غیرخطی (ψ_0=0.1 rad)



شکل ٢٣ نمودار مقایسه بین نتایج مدل خطی‌سازی شده و مدل سیستم غیرخطی



شکل ٢٤ بررسی مرزهای پایداری، با تاثیر تغییر در طول بازوی چرخ، توسط حل عددی معادله غیرخطی ($\psi_0=1\ rad$)

همین مسأله در شکل (٢٤) این‌بار با شرایط اولیه بزرگتر (ψ_0=1rad) نمایش داده شده است. به دلیل تغییر شرایط اولیه، مشاهده می‌شود که چرخه‌های حدی حاصل به صورت داخل‌شونده تبدیل شده‌اند. به‌جز شرایط اولیه، سایر پارامترهای شکل (٢٤) مانند شکل (٢٢) می‌باشند. مشاهده می‌شود که در اینجا نیز نتایج حل عددی تائیدکننده نتایج خطی‌سازی شده می‌باشد. همچنین به منظور تاکید بیشتر در شکل (٢٣) نیز این مساله به صورت مقایسه‌ای نشان داده شده است. در این شکل نمودار مرز پایداری به‌دست آمده در بخش مرزهای پایداری در ضریب میرائی ٢٥N.m/rad/s (شکل ٩) رسم گردیده و قسمت ناپایدار نمودار به صورت تیره‌تر مشخص گردیده است. از طرف دیگر نقاطی که در شکل (٢٢) پایداری

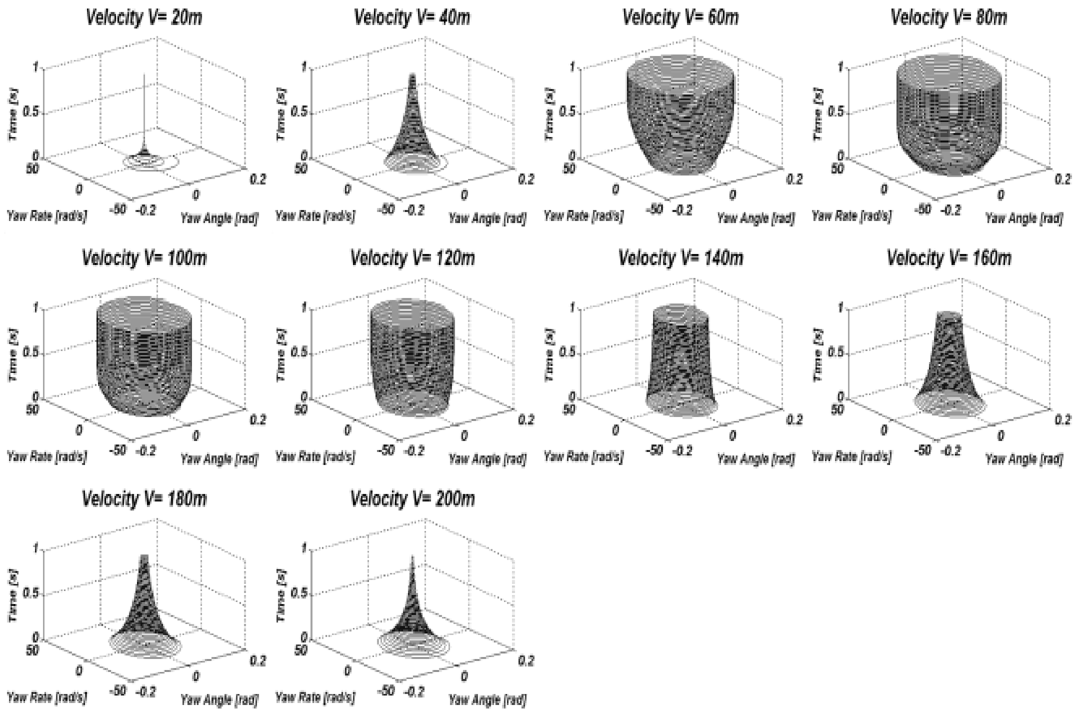
آن‌ها در سیستم غیرخطی بررسی شده بود نیز در این شکل مشخص شده‌اند. نقاط پایدار به صورت تیره و نقاط ناپایدار به صورت روشن‌تر نشان داده شده‌اند. همان‌گونه که در شکل نیز مشاهده می‌شود نتایج تحلیل غیرخطی، مرزهای به‌دست آمده از مدل خطی‌سازی شده را کاملا تایید می‌نماید (شکل ۲۳).

در مرحله بعد، بررسی بر روی مرز سیستم با تاثیر تغییر در سرعت پیشروی انجام می‌گیرد. این موضوع در شکل (۱۱) نشان داده شده است. همان‌گونه که از شکل پیداست، خطی در طول بازوی ۰/۲m رسم گردیده، که نمودار با ضریب ارتجاعی فنر ۵۰KN.m/rad را در دو نقطه، با سرعت‌های ۴۷m/s و ۱۵۳m/s قطع می‌کند. این دو نقطه نشان‌دهنده مرزهای تغییر حالت پایداری، با تغییر سرعت می‌باشند.

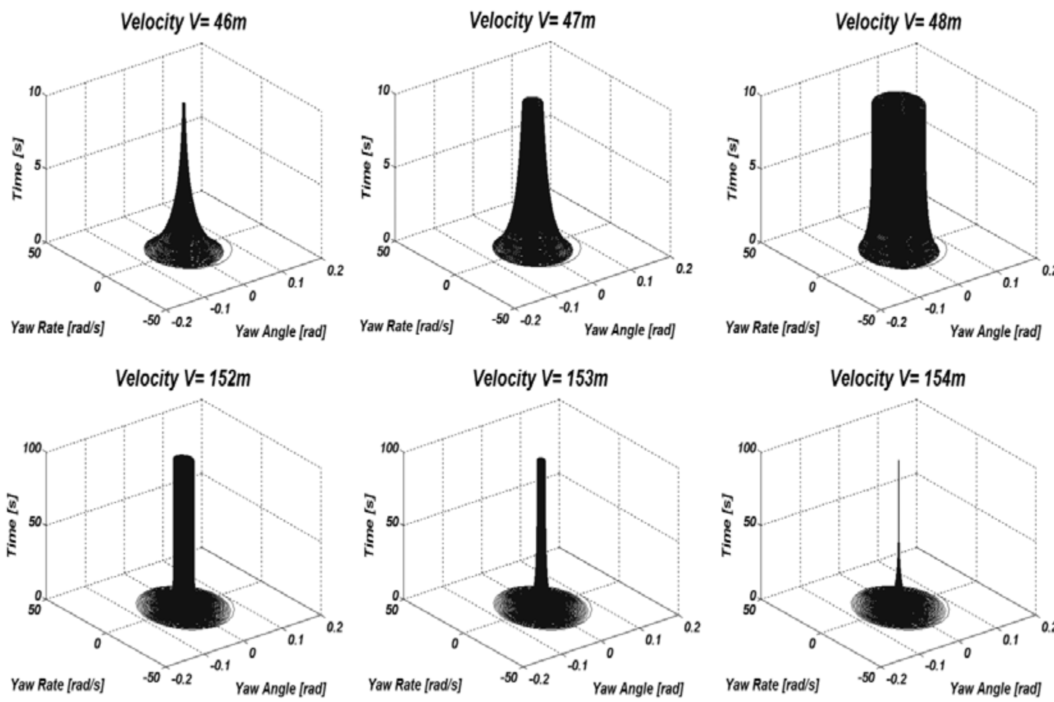
در نقطه اول با عبور سرعت از ۴۷m/s سیستم از حالت پایدار به ناپایدار، و در نقطه دوم با عبور از سرعت ۱۵۳m/s از حالت ناپایدار به پایدار تغییر حالت می‌دهد. این موضوع در شکل (۲۵) با حل عددی مدل غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است. در این شکل ۱۰ نمودار ارائه گردیده است، که در همه آن‌ها طول بازوی چرخ برابر ۰/۲m و ضریب ارتجاعی فنر نیز برابر ۵۰KN.m/rad و مقدار اولیه زاویه پیچشی ψ_0 کم و برابر ۰/۱rad می‌باشد. سایر پارامترها به‌جز سرعت پیشروی نیز، ثابت و برابر مقادیر داده شده در جدول (۱) می‌باشد. تنها تفاوت در حالات این نمودار، در سرعت پیشروی آن‌هاست، که از سرعت ۲۰m/s شروع و با گام ۲۰m/s تا سرعت ۲۰۰m/s افزایش می‌یابد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در دو حالت اول سیستم پایدار و نمودار پاسخ زمانی همگرا به صفر می‌باشد. اما در حالت سوم سیستم ناپایدار شده و پاسخ زمانی به صورت چرخه‌حدی خارج‌شونده تبدیل می‌شود. بنابراین باید یک مرز پایداری بین سرعت‌های ۴۰m/s و ۶۰m/s موجود باشد؛ (V=47 m/s) که این تأییدکننده نتایج تحلیل خطی است. با افزایش سرعت تا ۱۴۰m/s (نمودار هفتم)، سیستم همچنان ناپایدار خطی می‌باشد؛ که در سرعت ۱۶۰m/s دوباره به حالت پایدار، با پاسخ‌های زمانی همگرا به صفر تبدیل می‌شود. این نیز با نتایج تحلیل خطی، یعنی وجود مرز در سرعت ۱۵۳m/s مطابقت دارد. نتایج در شکل (۲۵) ارائه گردیده است. در این نمودارها محور xها، زاویه پیچشی ψ (rad)، محور yها، سرعت زاویه‌ای پیچشی $\dot{\psi}$ (rad/s)، و محور zها، نمایانگر زمان t (s)، می-باشند.

همچنین جهت بررسی دقیق‌تر مرزهای پایداری، این موضوع در شکل (۲۶) با تغییرات سرعت ۱m/s در اطراف دو مرز تعیین شده، نشان داده شده است. به جهت درک محسوس‌تر تفاوت‌ها، در اینجا مدل‌سازی در بازه زمانی ۱۰ و ۱۰۰ ثانیه انجام شده است؛ تا همگرا یا واگرا بودن شکل‌ها بهتر مشخص گردد. مشاهده می‌شود که در اینجا نیز، در مرز تعیین شده، تغییر حالت در پایداری رخ داده، و نتایج بخش خطی‌سازی، کاملا تائید می‌گردد.

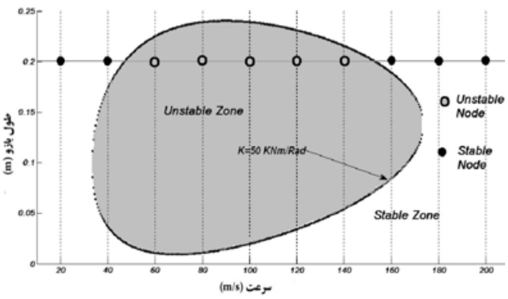
در این‌جا نیز به جهت انجام مقایسه‌ای بین نتایج به‌دست آمده و تایید داده‌های حاصل از روش خطی‌سازی، در شکل (۲۷) نمودار مقایسه‌ای رسم گردیده است. همانند شکل (۲۳) در این نمودار نیز مرز پایداری نشان داده شده در شکل (۱۱) برای ضریب ارتجاعی فنر برابر ۵۰KN.m/rad رسم گردیده و محدوده ناپایدار با رنگ تیره‌تر مشخص گردیده است. همچنین نقاطی که در شکل (۲۵) وضعیت پایداری آن‌ها به کمک مدل‌سازی سیستم غیرخطی تعیین گردیده بود نیز مشخص شده‌اند. نقاط پایدار با رنگ تیره و نقاط ناپایدار با رنگ روشن‌تر مشخص شده‌اند. همان‌گونه که شکل (۲۷) نیز گویا می‌باشد، نتایج مدل غیرخطی تاییدکننده نتایج خطی‌سازی شده می‌باشند.



شکل ۲۵ بررسی مرزهای پایداری، با تاثیر تغییر در سرعت پیشروی، توسط حل عددی معادله غیرخطی *($\psi0=0.1$ rad)*



شکل ۲٦ بررسی دقیق‌تر مرزهای پایداری، با تغییر ۱m/s در سرعت پیشروی، توسط حل عددی معادله غیرخطی *($\psi_0=0.1$ rad)*



شکل ۲۷ نمودار مقایسه بین نتایج مدل خطی‌سازی شده و مدل سیستم غیرخطی

نتیجه گیری

یکی از روش‌های بررسی پدیده‌های غیرخطی، خطی‌سازی آن‌ها می‌باشد. در این مقاله ابتدا یک مدل غیرخطی جهت تحلیل پدیده Shimmy معرفی گردید. سپس معادلات حاصله خطی‌سازی شده و فضای حالت سیستم تشکیل گردید. آنگاه با تعیین مقادیر ویژه ماتریس ضرائب، به کمک معیار روث-هورویتس پایداری در سیستم خطی‌سازی شده مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه به کمک معادله مشخصه سیستم، رابطه‌ای جهت یافتن مرزهای پایداری سیستم به‌دست آمد. با تغییر مقادیر پارامترها در این رابطه، و تعیین مرزهای پایداری، اثر چند پارامتر مهم بر محدوده پایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفت. نتایج آن در جدول (۲) ارائه گردیده است.

در مرحله آخر نیز، با استفاده از نرم‌افزار، مدل غیرخطی سیستم حل عددی شده و دامنه ارتعاشات در حالات مختلف تعیین گردید. با استفاده از نتایج این بخش، و با بررسی روند تغییر پارامترها در پایداری حالات مختلف، نتایج مدل خطی‌سازی‌شده بررسی و مورد تأیید قرار گرفت.

نتیجه اینکه به کمک روش خطی‌سازی می‌توان حالت کلی سیستم، و پایداری یا عدم پایداری آن را در حالات مختلف تعیین نمود. اما برای تعیین مشخصات دقیق حالت سیستم، و همچنین تعیین دامنه ارتعاشات و نوع ناپایداری آن، باید از حل عددی مدل غیرخطی استفاده نمود. در برخی حالات علی‌رغم نشان دادن ناپایداری نقطه‌ای در تحلیل خطی، سیستم در یک چرخه‌حدی پایدار قرار می‌گیرد؛ که این چرخه و دامنه ارتعاشات آن تنها با حل عددی مدل غیرخطی قابل تعیین می‌باشد.

جدول ۲ تأثیر پارامترهای مختلف بر ناپایداری

نام پارامتر	اثر افزایش میزان پارامتر	اثر افزایش سرعت با ثابت بودن پارامتر
ضریب میرائی	کاهش ناپایداری	برای سرعت‌های کمتر از ۱۰۰m/s افزایش ناپایداری برای سرعت‌های بیشتر از ۱۰۰m/s کاهش ناپایداری
ضریب ارتجاعی فنر	کاهش ناپایداری	برای سرعت‌های کمتر از ۱۰۰m/s افزایش ناپایداری برای سرعت‌های بیشتر از ۱۰۰m/s کاهش ناپایداری
طول بازوی چرخ	برای مقادیر کوچک‌تر از ۰/۱m افزایش ناپایداری برای مقادیر بزرگ‌تر از ۰/۱m کاهش ناپایداری	برای سرعت‌های کمتر از ۱۰۰m/s افزایش ناپایداری برای سرعت‌های بیشتر از ۱۰۰m/s کاهش ناپایداری
نیروی عمودی	افزایش ناپایداری	افزایش ناپایداری
ممان اینرسی	افزایش ناپایداری	برای سرعت‌های کمتر از ۳۰m/s افزایش ناپایداری برای سرعت‌های بیشتر از ۳۰m/s کاهش ناپایداری

فهرست علائم

a	نصف طول تماس تایر با زمین[m]
c	ضریب میرائی پیچشی [N.m/rad/s]
$c_{f\alpha}$	ضریب نیروی جانبی تایر[1/rad]
$c_{m\alpha}$	ضریب گشتاور همسوگر تایر[m/rad]
E	طول بازوی چرخ[m]
F_y	نیروی جانبی تایر[N]
F_z	نیروی عمودی[N]
i	واحد موهومی[-]
I_z	ممان اینرسی حول محورZ [kgm2]
k	ضریب ارتجاعی فنر پیچشی[N.m/rad]
$L_{1,2,3}$	ضرائب معادلات مرزهای پایداری [-]
$m_{1...6}$	المان‌های ماتریس ضرائب [-]
M_1	گشتاور ارتجاعی فنر پیچشی [N.m]
M_2	گشتاور میرائی پیچشی[N.m]
M_3	گشتاور میرائی حاصل از دندانه‌های چرخ [N.m]
M_4	مجموع گشتاورهای تایر حول محور Z [N.m]
M_z	گشتاور همسوگر تایر[N.m]
s	ضریب لاپلاس[-]
t	زمان[s]
V	سرعت پیشروی تایر[m/s]
y	جابجایی عرضی تایر در نقطه تماس[m]
α	زاویه لغزش تایر[rad]
α_g	حدود زاویه لغزش برای گشتاور همسوگر[deg]
δ	حدود زاویه لغزش برای نیروی جانبی[deg]
κ	ثابت گشتاور میرائی دندانه‌های چرخ[N.m2/rad]
σ	طول آرامش تایر[m]
τ	ثابت زمانی دینامیک تایر[s]
ψ	زاویه پیچشی ارابه فرود[rad]

مراجع

1. Pritchard, J.I.,"An Overview of Landing Gear Dynamics", NASA Center for Aero Space Information (CASI). 7121 Standard Drive, (1999).
2. Besselink, I.J.M.,"Shimmy of Aircraft Main Landing Gears", Ph.D thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, (2001).
3. Engelsman, W.P.D., "*shimmy an introduction*", WFW, pp. 92-130, Eindhoven, (1992).
4. Pacejka, H.B., "Approximate Dynamic Shimmy Response of Pneumatic Tires", *Int J of Vehicle Mechanics and Mobility*, pp. 49-60, (1973).
5. Collin, R.L. and Black, R.J., "Tire parameters for landing gear shimmy studies", *J of Aircraft*, May-June 1969, pp. 252-258, (1969).
6. Zhou, J.X. and Zhang, L.,"Incremental harmonic balance method for predicting amplitudes of a multi-d.o.f. non-linear wheel shimmy system with combined Coulomb and quadratic damping", *J of Sound and Vibration*, Vol. 279, pp. 403–416, (2003).
7. Krabacher, W.E., "A Comparison of the Moreland and Von Schlippe-Dietrich Landing Gear Tire Shimmy Models", *Vehicle System Dynamics Supplement,* Vol. 27, pp. 335-338, (1997).
8. Somieski, G.,"Shimmy Analysis of a Simple Aircraft Nose Landing Gear Model Using Different Mathematical Methods", *Aerospace Science and Technology* , 1(8), pp. 545–555, (1997).
9. Esmailzadeh, E. and Farzaneh, K.A., "Shimmy Vibration Analysis of Aircraft Landing Gears", *J of Vibration and Control*, 5(1), pp. 45–56, (1997).

10. Somieski, G., "An Eigenvalue Method for Calculation of Stability and Limit Cycle in Nonlinear Systems", *Nonlinear Dynamics*, 26(1), pp. 3–22, (2001).
11. Etienne Coetzee group, "Shimmy in Aircraft Landing Gear", *Airbus document provided to the Study Group by Etienne Coetzee*, pp. B1-B11, (2002).
12. Pacejka, H.B., "*Tyre and Vehicle Dynamics*", Delft university of Technology, The Netherlands, (2005).
13. Takacs, D., and Stepan, G., and Hogan, S.J., "Isolated large amplitude periodic motions of towed rigid wheels", *Nonlinear Dyn*, (2007).
14. Fallah, M.S., and Long, S.H., and Xie, W.F., and Bhat, R., "Robust Model Predictive Control of Shimmy Vibration in Aircraft Landing Gears", *J of AIRCRAFT*, 45(6), (2008).
15. Takacs, D., and Orosz G., and Stepan, G., "Delay effects in shimmy dynamics of wheels with stretched string-like tyres", *Eur J of Mechanics A/Solids*, Vol. 28, pp.516–525, (2009).